

Beschikbare tijd: 100 minuten

Instructies voor het invullen van het antwoordblad.

1. Dit open boek tentamen bestaat uit **10** opgaven.
2. U mag tijdens het tentamen gebruik maken van:
 - Een tabellenboek, zonder aantekeningen;

Toegestane boeken:

- een wiskundeboek naar keuze
- Rekenmachine

3. Het aantal te behalen punten.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	5	5	5	10	5	5	15	15	20

$$Cijfer = \frac{Aantal\ punten}{9} + 1$$

Veel succes!



- Vraag 1:** Differentieer $f(x) = x^3 \cdot (x^2 + \frac{1}{x})$
- Vraag 2:** Differentieer $f(x) = a \cdot x^b + \frac{c}{x^d}$
- Vraag 3:** Differentieer $f(x) = (\cos(1+x))^5$
- Vraag 4:** Bepaal de primitieve van $f(x) = x^2 + 5 \cdot x^5$
- Vraag 5:** Bepaal de primitieve van $f(x) = x \cdot \sin(x^2)$
- Vraag 6:** Bereken de volgende integraal $\int_2^5 (x^2 - 3 \cdot x + 5) dx$
- Vraag 7:** Bepaal de primitieve van $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$
- Vraag 8:** Een fietsband verliest elke week 3,5% van zijn spanning. Als er nog 70% van de oorspronkelijke spanning aanwezig is moet de band opnieuw opgepompt worden. Bereken het aantal weken tussen twee oppompbeurten. Geef het antwoord met minimaal 1 cijfer achter de komma nauwkeurig.
- Vraag 9:** Gegeven is een gesloten blik, met diameter D en hoogte h. De inhoud bedraagt juist 1 liter.
- Bepaal de diameter en de hoogte zo, dat het benodigde plaatmateriaal om het blik te vervaardigen, minimaal is.
- Vraag 10** In een cilinder wordt een hoeveelheid lucht gecomprimeerd volgens de wet van Poisson.
Deze zegt $p_1 \cdot V_1^n = p_2 \cdot V_2^n$
- De volgende gegevens zijn bekend
- | | | |
|---------------|-----|----------------|
| Beginvolume = | 2 | m ³ |
| Eindvolume = | 0,5 | m ³ |
| Begindruk = | 1 | bar |
| Einddruk = | 5 | bar |
- Schets dit proces in een p – V - diagram
 - Bereken de waarde van n
 - Bereken de benodigde compressiearbeid.

UITWERKINGEN

Vraag 1 Differentieer $f(x) = x^3 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$

Manier 1

Op deze eerste manier wordt weliswaar goed, maar niet slim gehandeld. De gegeven functie bestaat uit een product van een tweetal relatief eenvoudige functies. Hierop wordt de productregel toegepast.

$$\frac{d f(x)}{dx} = \frac{d \left\{ x^3 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) \right\}}{dx} = \frac{d}{dx} x^3 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) + x^3 \cdot \frac{d}{dx} \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{d f(x)}{dx} = 3 \cdot x^2 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) + x^3 \cdot \left(2 \cdot x - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\frac{d f(x)}{dx} = 3 \cdot x^4 + 3 \cdot x + 2 \cdot x^4 - x$$

$$\frac{d f(x)}{dx} = 5 \cdot x^4 + 2 \cdot x$$

Manier 2

Als wat langer naar de gegeven vorm gekeken wordt, dan kan tijdswinst behaald worden door deze eerst uit te vermenigvuldigen. Er volgt dan:

$$\frac{d f(x)}{dx} = \frac{d \left\{ x^3 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) \right\}}{dx} = \frac{d \left\{ x^5 + x^2 \right\}}{dx} = 5 \cdot x^4 + 2 \cdot x$$

Veel commentaar zal hierna niet nodig zijn!

Vraag 2: Differentieer $f(x) = a \cdot x^b + \frac{c}{x^d}$

$$\frac{d f(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left\{ a \cdot x^b + \frac{c}{x^d} \right\} = a \cdot b \cdot x^{b-1} - c \cdot d \cdot x^{-d-1} = a \cdot b \cdot x^{b-1} - \frac{c \cdot d}{x^{d+1}}$$

Vraag 3: Differentieer $f(x) = (\cos(1+x))^5$

$$\frac{d f(x)}{dx} = \frac{d(\cos(1+x))^5}{d \cos(1+x)} \cdot \frac{d \cos(1+x)}{d(1+x)} \cdot \frac{d(1+x)}{dx}$$

$$\frac{d f(x)}{dx} = 5 \cdot (\cos(1+x))^4 \cdot -\sin(1+x) \cdot 1$$

$$\frac{d f(x)}{dx} = -5 \cdot \sin(1+x) \cdot (\cos(1+x))^4$$

Vraag 4: Bepaal de primitieve van $f(x) = x^2 + 5 \cdot x^5$

$$\int f(x) dx = \int (x^2 + 5 \cdot x^5) dx = \int (x^2) dx + \int (5 \cdot x^5) dx = \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{5}{6} \cdot x^6 + C$$

Vraag 5: Bepaal de primitieve van $f(x) = x \cdot \sin(x^2)$

$$\int f(x) dx = \int x \cdot \sin(x^2) dx$$

Beschouw nu eerst apart

$$\frac{d x^2}{dx} = 2 \cdot x$$

Hieruit vinden we dat geschreven kan worden

$$dx = \frac{d x^2}{2 \cdot x}$$

Deze vorm wordt ingevuld in de oorspronkelijke opgave. We zien:

$$\int f(x) dx = \int x \cdot \sin(x^2) dx = \int x \cdot \sin(x^2) \frac{d x^2}{2 \cdot x}$$

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \int \sin(x^2) d x^2 = -\frac{1}{2} \cdot \cos(x^2) + C$$

Vraag 6: Bereken de volgende integraal $\int_2^5 (x^2 - 3 \cdot x + 5) dx$

$$\int_2^5 (x^2 - 3 \cdot x + 5) dx = \left[\frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x^2 + 5 \cdot x \right]_2^5 =$$

$$\left[\left\{ \frac{1}{3} \cdot 5^3 - \frac{3}{2} \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 \right\} - \left\{ \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 \right\} \right] = \frac{45}{2}$$

Vraag 7: Bepaal de primitieve van $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

$$\int f(x) dx = \int \frac{x-1}{x^2} dx = \int \frac{x}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^2} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx = \ln x + \frac{1}{x} + C$$

Vraag 8: Een fietsband verliest elke week 3,5% van zijn spanning. Als er nog 70% van de oorspronkelijke spanning aanwezig is moet de band opnieuw opgepompt worden. Bereken het aantal weken tussen twee oppompbeurten.

De “groeifactor” van de druk in de fietsband bedraagt $1 - 0,035 = 0,965$. Merk hierbij op dat de term “groeifactor” een wat vreemde betekenis heeft. Desondanks wordt voor deze toepassing toch deze term gebruikt.

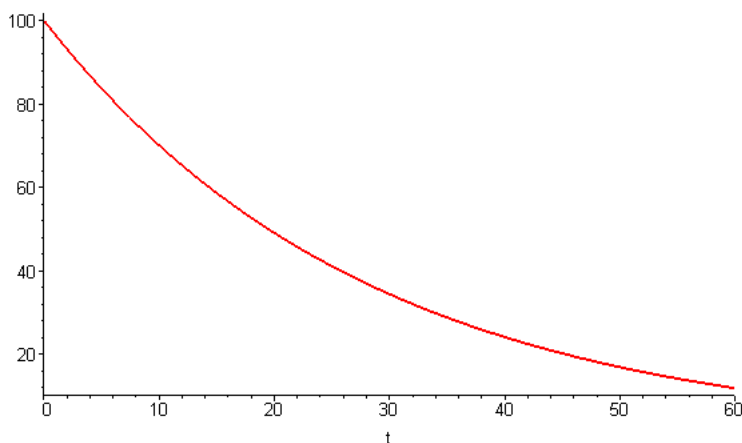
Voor de druk, op tijdstip t , met t in weken, laten we nu gelden: $p(t) = p(0) \cdot 0,965^t$

Wanneer de band nog een spanning heeft van 70%, geldt: $0,7 = 0,965^t$

Dit is het geval voor $\ln 0,7 = t \cdot \ln 0,965$

$$\text{Dus voor } t = \frac{\ln 0,7}{0,965} = 10,01$$

De band moet dus na tien weken weer opnieuw op spanning worden gebracht!



Het verloop van de spanning in de band als functie van de tijd, t , in weken.

Vraag 9: Gegeven is een gesloten blik, met diameter D en hoogte h . De inhoud bedraagt juist 1 liter.

Bepaal de diameter en de hoogte zo, dat het benodigde plaatmateriaal om het blik te vervaardigen, minimaal is.

Voor de inhoud geldt:

$$V = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot D^2 \cdot h = 1$$

Dat betekent dat nu voor de hoogte geschreven kan worden:

$$\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot D^2 \cdot h = 1$$

$$h = \frac{1}{\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot D^2} = \frac{4}{\pi \cdot D^2}$$

Voor de oppervlakte, van het (gesloten) blik geldt nu

$$A(D) = \pi \cdot D \cdot h + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot D^2 \text{ en met } h = \frac{4}{\pi \cdot D^2} \text{ geldt}$$

$$A(D) = \pi \cdot D \cdot \frac{4}{\pi \cdot D^2} + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot D^2$$

$$\text{Vereenvoudigen geeft } A(D) = \frac{4}{D} + \frac{2}{4} \cdot \pi \cdot D^2$$

Vervolgens wordt de afgeleide bepaald, nul gesteld en verder uitgewerkt. We vinden:

$$\frac{d A(D)}{d D} = -\frac{4}{D^2} + \pi \cdot D = 0$$

$$\frac{4}{D^2} = \pi \cdot D$$

$$\text{Tenslotte vinden we } D = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} = 1,083 \text{ dm}$$

$$\text{De hoogte van het blik bedraagt dan } h = \frac{4}{\pi \cdot D^2} = \frac{4}{\pi \cdot 1,083^2} = 1,085 \text{ dm}$$

De zojuist gevonden antwoorden kunnen nu gemakkelijk worden gecontroleerd! Invullen in de formule voor de inhoud. Het antwoord is immers bekend!

Vraag 10:

In een cilinder wordt een hoeveelheid lucht gecomprimeerd volgens de wet van Poisson. Deze zegt

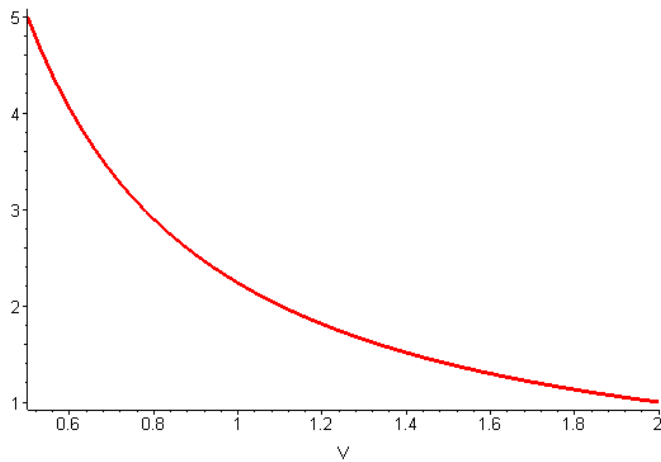
$$p_1 \cdot V^{n_1} = p_2 \cdot V^{n_2}$$

De volgende gegevens zijn bekend

Beginvolume =	2	m ³
Eindvolume =	0,5	m ³
Begindruk =	1	bar
Einddruk =	5	bar

- Schets dit proces in een p – V - diagram
- Bereken de waarde van n
- Bereken de benodigde compressiearbeid.

a.



Schematische weergave van het compressieproces

b.

Er geldt

$$p_1 \cdot V_1^n = p_2 \cdot V_2^n$$

$$1 \cdot 2^n = 5 \cdot 0,5^n$$

Herschikken levert

$$\frac{1}{5} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Links en rechts de logaritme nemen levert $\ln\left(\frac{1}{5}\right) = n \cdot \ln\left(\frac{1}{4}\right)$, waarna $n = \frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} = 1,161$

c.

De benodigde compressiearbeid is de oppervlakte onder de compressielijn en als geschetst onder a.

Omdat geldt $p_1 \cdot V_1^n = p_2 \cdot V_2^n$ kan nu gemakkelijk gevonden worden

$$p \cdot V^{1,161} = 5 \cdot 10^2 \cdot 0,5^{1,161}$$

$$p = 500 \cdot \left(\frac{0,5}{V}\right)^{1,161} \quad [kPa]!!!!$$

De gevraagde hoeveelheid arbeid wordt berekend uit

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = 500 \cdot 0,5^{1,161} \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V^{1,161}} \, dV = 500 \cdot 0,5^{1,161} \int_{V_1}^{V_2} V^{-1,161} \, dV = 500 \cdot 0,5^{1,161} \cdot \left[\frac{1}{-1,161+1} \cdot V^{-1,161+1} \right]_2^{0,5}$$

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = 500 \cdot 0,5^{1,161} \cdot \left[\frac{1}{-1,161+1} \cdot V^{-1,161+1} \right]_2^{0,5} = 500 \cdot 0,5^{1,161} \cdot \frac{1}{-1,161+1} \left[\{V^{-1,161+1}\} - \{V^{-1,161+1}\} \right]_2^{0,5}$$

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = 500 \cdot 0,5^{1,161} \cdot \frac{1}{-0,161} \left[\{0,5^{-0,161}\} - \{2^{-0,161}\} \right] = -1388,8 \cdot \{1,11806 - 0,8944\} = -310,6 \, kJ$$

Merk op dat het antwoord negatief is. Dit is in overeenstemming met de wetten van de natuur; bij compressie moet immers energie (arbeid) toegevoerd worden!